

Agradeço à Profa. Cristina Gomes Fernandes
por permitir o uso de seu material



Análise de Algoritmos

**Parte destes slides são adaptações de slides
do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.**

Análise de Algoritmos

CLRS 7

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Partição

Problema: Rearranjar um dado vetor $A[p..r]$ e devolver um índice q tal que $p \leq q \leq r$ e

$$A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$$

Entra:

	<i>p</i>								<i>r</i>	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Partição

Problema: Rearranjar um dado vetor $A[p..r]$ e devolver um índice q tal que $p \leq q \leq r$ e

$$A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$$

Entra:

A[q] é chamado
de PIVÔ

	<i>p</i>								<i>r</i>	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Sai:

	<i>p</i>			<i>q</i>					<i>r</i>	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Partizione

p *r*

<i>A</i>	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
----------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Particione

	<i>i</i>	<i>j</i>							<i>x</i>	
<i>A</i>	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

$x = A[r] = 44$ é o PIVÔ

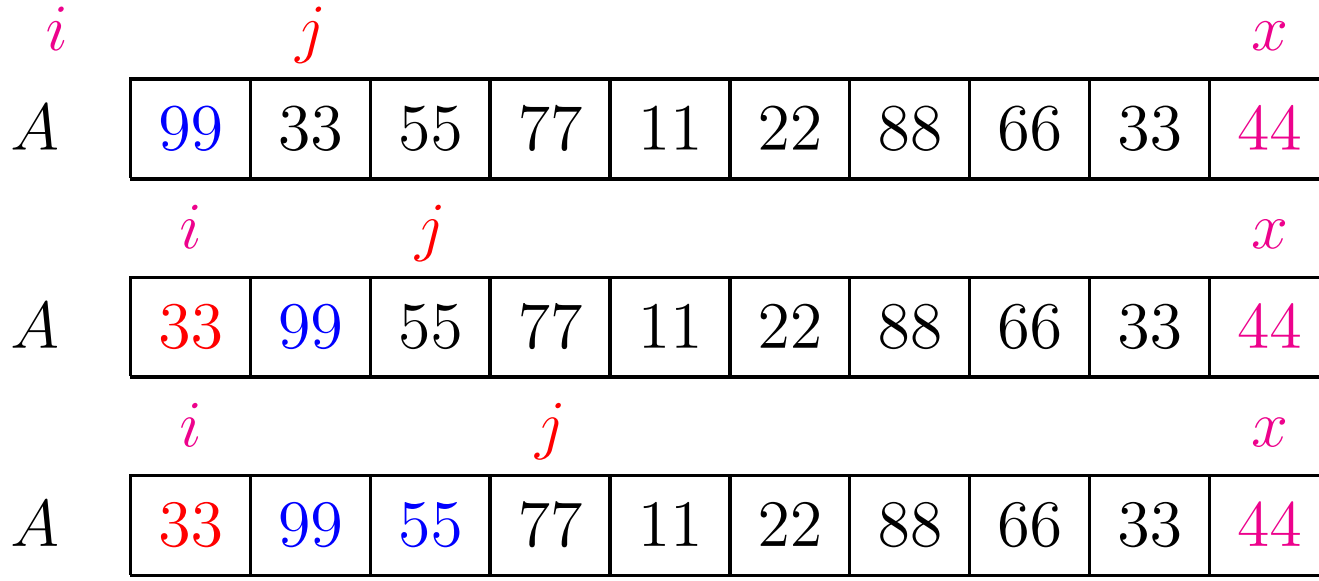
Partizione

	i		j						x	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Partizione

	<i>i</i>		<i>j</i>						<i>x</i>	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
	<i>i</i>		<i>j</i>						<i>x</i>	
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Partizione



Partizione

i		j							x	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j						x	
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i			j					x	
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Partizione

i j x

A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

i j x

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

i j x

A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Partizione

i *j* *x*

A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

i *j* *x*

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

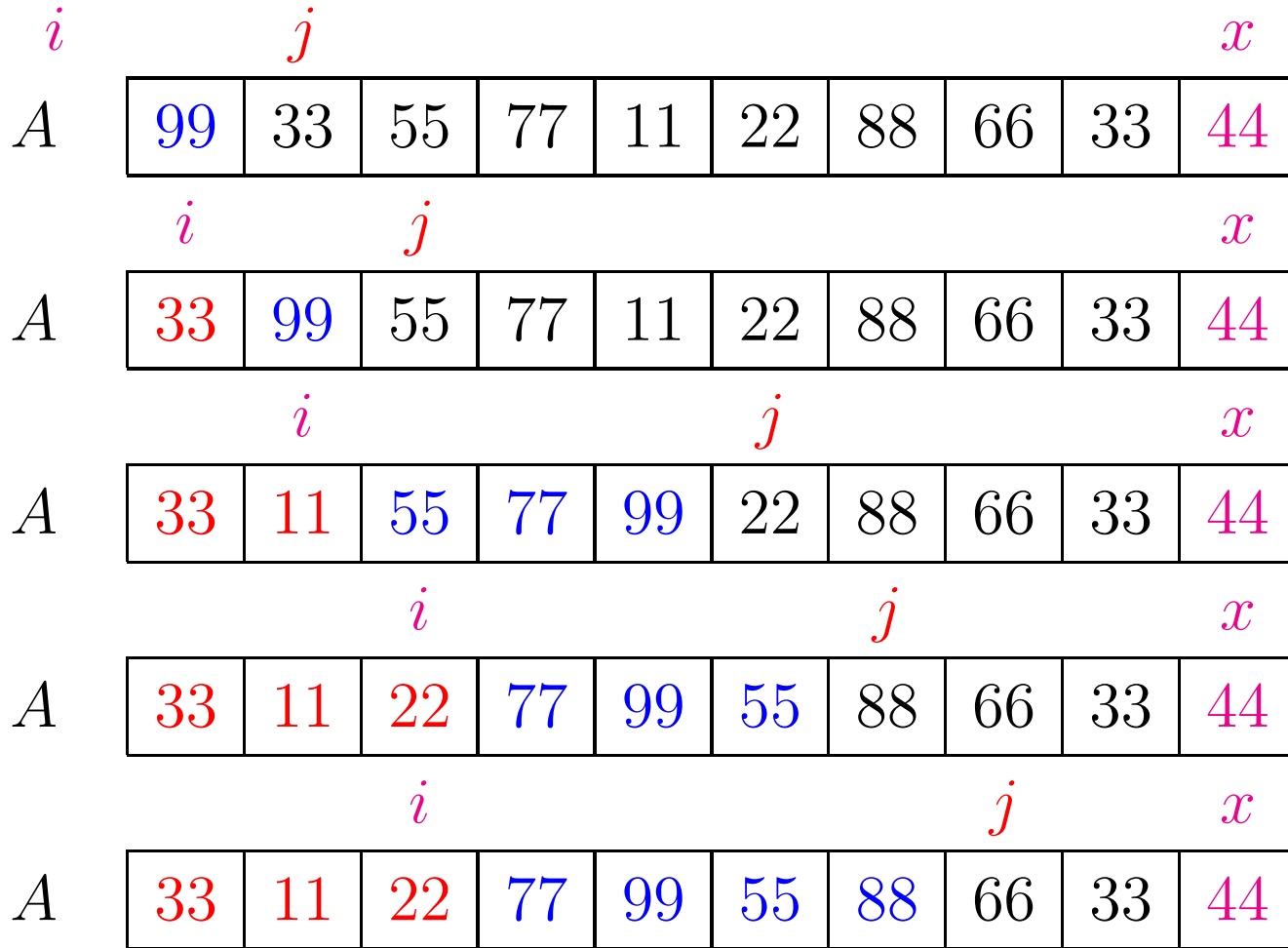
i *j* *x*

A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

i *j* *x*

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Partizione



Partizione

i *j* *x*

A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

i *j* *x*

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

i *j* *x*

A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

i *j* *x*

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

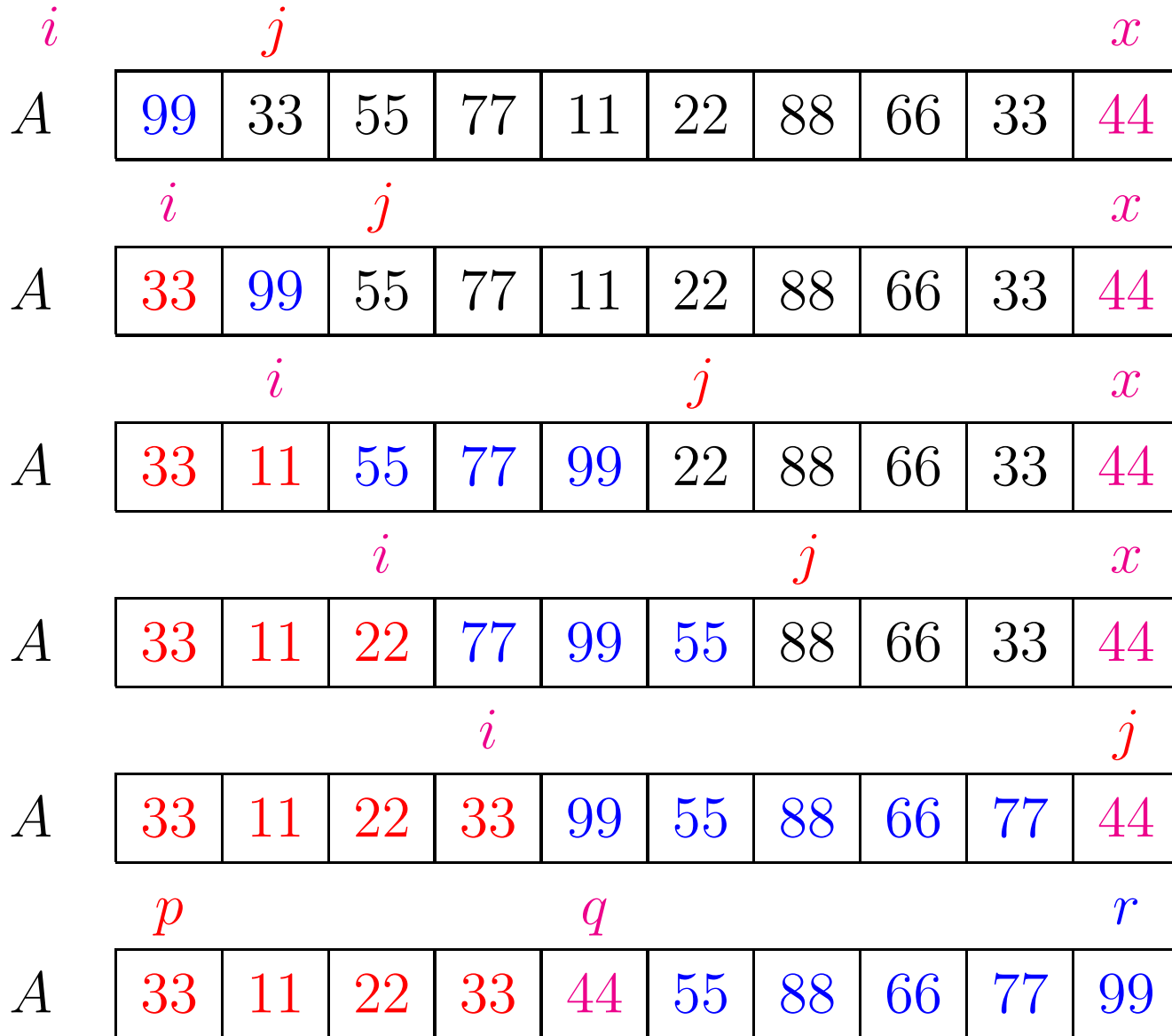
i *j* *x*

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Partizione

i		j							x	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
	i		j						x	
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
		i			j				x	
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
			i			j			x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
				i					j	
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

Partizione



Particione

Rearranja $A[p..r]$ de modo que $p \leq q \leq r$ e
 $A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$

PARTICIONE (A, p, r)

- 1 $x \leftarrow A[r]$ $\triangleright x$ é o “pivô”
- 2 $i \leftarrow p-1$
- 3 **para** $j \leftarrow p$ **até** $r-1$ **faça**
- 4 **se** $A[j] \leq x$
- 5 **então** $i \leftarrow i+1$
- 6 $A[i] \leftrightarrow A[j]$
- 7 $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
- 8 **devolva** $i+1$

Invariantes: no começo de cada iteração de 3–6,

(i0) $A[p..i] \leq x$ (i1) $A[i+1..j-1] > x$ (i2) $A[r] = x$

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha consumo de todas as execuções da linha

$$1-2 \quad = 2 \Theta(1)$$

$$3 \quad = \Theta(n)$$

$$4 \quad = \Theta(n)$$

$$5-6 \quad = 2 O(n)$$

$$7-8 \quad = 2 \Theta(1)$$

$$\text{total} \quad = \Theta(2n + 4) + O(2n) \quad = \Theta(n)$$

Conclusão:

O algoritmo **PARTICIONE** consome tempo $\Theta(n)$.

Quicksort

Rearranja $A[p..r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)

1 **se** $p < r$

2 **então** $q \leftarrow$ **PARTICIONE** (A, p, r)

3 **QUICKSORT** ($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT** ($A, q + 1, r$)

DIVIDIR. Tempo $O(n)$

CONQUISTAR

CONQUISTAR

Não tem fase de
COMBINAR

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Pois, após ordenar o 1o e o 2o subvetor, o vetor inteiro já estará ordenado, já que os elementos do primeiro são menores ou iguais ao PIVÔ, que é menor que todos os elementos do segundo.

Quicksort

Rearranja $A[p..r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)

1 **se** $p < r$

2 **então** $q \leftarrow$ **PARTICIONE** (A, p, r)

3 **QUICKSORT** ($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT** ($A, q + 1, r$)

	p			q				r		
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

No começo da linha 3,

$$A[p..q-1] \leq A[q] \leq A[q+1..r]$$

Quicksort

Rearranja $A[p..r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)

1 **se** $p < r$

2 **então** $q \leftarrow$ **PARTICIONE** (A, p, r)

3 **QUICKSORT** ($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT** ($A, q + 1, r$)

	p			q				r		
A	11	22	33	33	44	55	88	66	77	99

Quicksort

Rearranja $A[p..r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)

1 **se** $p < r$

2 **então** $q \leftarrow$ **PARTICIONE** (A, p, r)

3 **QUICKSORT** ($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT** ($A, q + 1, r$)

	p			q				r		
A	11	22	33	33	44	55	66	77	88	99

Quicksort

Rearranja $A[p..r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)

1 **se** $p < r$

2 **então** $q \leftarrow$ **PARTICIONE** (A, p, r)

3 **QUICKSORT** ($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT** ($A, q + 1, r$)

No começo da linha 3,

$$A[p..q-1] \leq A[q] \leq A[q+1..r]$$

Consumo de tempo?

Quicksort

Rearranja $A[p..r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)

1 **se** $p < r$

2 **então** $q \leftarrow$ **PARTICIONE** (A, p, r)

3 **QUICKSORT** ($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT** ($A, q + 1, r$)

No começo da linha 3,

$$A[p..q-1] \leq A[q] \leq A[q+1..r]$$

Consumo de tempo?

$T(n) :=$ consumo de tempo no **pior caso** sendo

$$n := r - p + 1$$

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	=	?
2	=	?
3	=	?
4	=	?
total	=	????

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2	$= \Theta(n)$
3	$= T(k)$
4	$= T(n - k - 1)$

k é o tamanho do 1o subvetor

n-k-1 é o tamanho do 2o subvetor, pois remove o primeiro e o PIVÔ

$$\text{total} = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n + 1)$$

$$0 \leq k := q - p \leq n - 1$$

Recorrência

$T(n)$:= consumo de tempo **máximo** quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n)$$

Recorrência

$T(n)$:= consumo de tempo **máximo** quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n)$$

Recorrência grosseira:

$$T(n) = T(0) + T(n - 1) + \Theta(n)$$

$T(n)$ é $\Theta(???)$.

Tomando $k=0$.

É o PIOR CASO do Quick Sort, quando o vetor está ordenado crescentemente ($k = 0$) ou decrescentemente ($k = n-1$)

Recorrência

$T(n)$:= consumo de tempo **máximo** quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n)$$

Recorrência grosseira:

$$T(n) = T(0) + T(n - 1) + \Theta(n)$$

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

Demonstração: ... Exercício!

Recorrência cuidadosa

$T(n)$:= consumo de tempo **máximo** quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Recorrência cuidadosa

$T(n)$:= consumo de tempo **máximo** quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$T(0) = 1$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

n	0	1	2	3	4	5
$T(n)$	1	1	2 + 2	5 + 3	9 + 4	14 + 5

Recorrência cuidadosa

$T(n)$:= consumo de tempo **máximo** quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$T(0) = 1$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

n	0	1	2	3	4	5
$T(n)$	1	1	2 + 2	5 + 3	9 + 4	14 + 5

Vamos mostrar que $T(n) \leq n^2 + 1$ para $n \geq 0$.

Demonstração

Prova: Trivial para $n \leq 1$. Se $n \geq 2$ então

$$\begin{aligned} T(n) &= \max_{0 \leq k \leq n-1} \left\{ T(k) + T(n-k-1) \right\} + n \\ &\stackrel{\text{hi}}{\leq} \max_{0 \leq k \leq n-1} \left\{ k^2 + 1 + (n-k-1)^2 + 1 \right\} + n \\ &= \dots \\ &= n^2 - n + 3 \\ &\leq n^2 + 1. \end{aligned}$$

Prove que $T(n) \geq \frac{1}{2} n^2$ para $n \geq 1$.

Algumas conclusões

$$T(n) \text{ é } \Theta(n^2).$$

O consumo de tempo do QUICKSORT no pior caso é $O(n^2)$.

O consumo de tempo do QUICKSORT é $O(n^2)$.

Quicksort no melhor caso

$M(n)$:= consumo de tempo **mínimo** quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Quicksort no melhor caso

$M(n)$:= consumo de tempo **mínimo** quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Então o Quick-Sort tem tempo de MELHOR CASO $O(n \log n)$

Poderíamos simplificar mais ainda, já tomando $k = n/2$.

Obteríamos uma recorrência muito semelhante à do Merge-Sort, que tem tempo $O(n \log n)$

Quicksort no melhor caso

$M(n)$:= consumo de tempo **mínimo** quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Mostre que $M(n) \geq (n + 1) \lg(n + 1)$ para $n \geq 1$.

Quicksort no melhor caso

$M(n)$:= consumo de tempo **mínimo** quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Mostre que $M(n) \geq (n + 1) \lg(n + 1)$ para $n \geq 1$.

Isto implica que **no melhor** caso o **QUICKSORT** é $\Omega(n \lg n)$,

Quicksort no melhor caso

$M(n)$:= consumo de tempo **mínimo** quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Mostre que $M(n) \geq (n + 1) \lg(n + 1)$ para $n \geq 1$.

Isto implica que **no melhor** caso o **QUICKSORT** é $\Omega(n \lg n)$,
que é o mesmo que dizer que o **QUICKSORT** é $\Omega(n \lg n)$.

Mais algumas conclusões

$M(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do **QUICKSORT** no melhor caso é $\Omega(n \log n)$.

Na verdade ...

O consumo de tempo do **QUICKSORT** no melhor caso é $\Theta(n \log n)$.

Análise de caso médio do Quicksort

Apesar do consumo de tempo de pior caso do QUICKSORT ser $\Theta(n^2)$, sua performance na prática é comparável (e em geral melhor) a de outros algoritmos cujo consumo de tempo no pior caso é $O(n \lg n)$.

Por que isso acontece?

Exercício

Considere a recorrência


$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \dots$

Solução assintótica: $T(n)$ é $O(???)$, $T(n)$ é $\Theta(???)$

INTUIÇÃO para o Caso Médio.
Assuma que o PARTIÇÃO
sempre faz uma divisão ruim 1:2



Exercício

Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

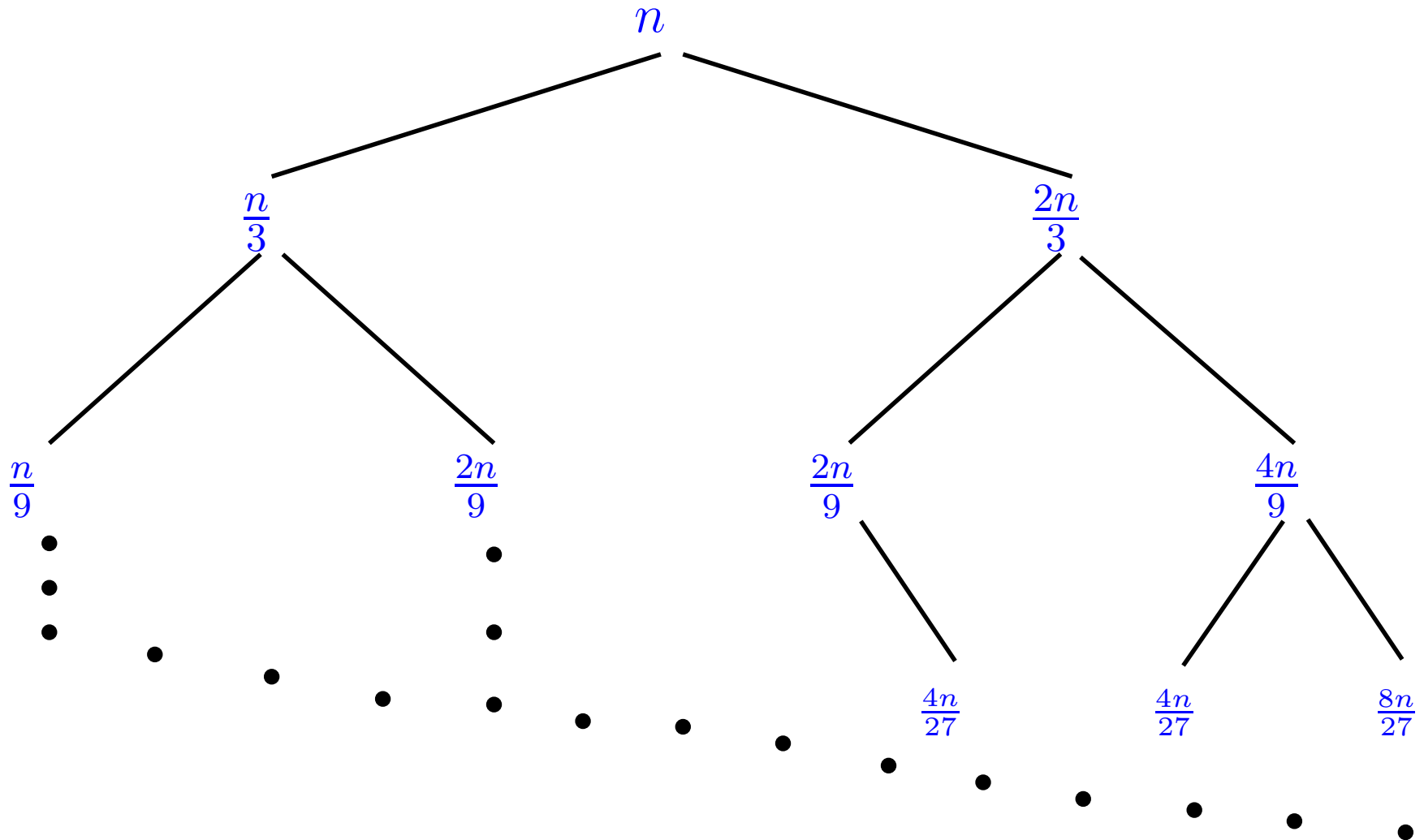
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \dots$

Solução assintótica: $T(n)$ é $O(???)$, $T(n)$ é $\Theta(???)$

Vamos olhar a **árvore da recorrência**.

Árvore da recorrência



total de níveis $\leq \log_{3/2} n$

Árvore da recorrência

soma em cada horizontal $\leq n$

número de “níveis” $\leq \log_{3/2} n$

$T(n)$ = a soma de tudo

$$T(n) \leq n \log_{3/2} n + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\log_{3/2} n}$$

$T(n)$ é $O(n \lg n)$.

De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

n	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

n	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

Vamos mostrar que $T(n) \leq 20 n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

n	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

Vamos mostrar que $T(n) \leq 20n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

Para $n = 2$ temos $T(2) = 4 < 20 \cdot 2 \cdot \lg 2$.

Para $n = 3$ temos $T(3) = 8 < 20 \cdot 3 \cdot \lg 3$.

Suponha agora que $n > 3$. Então...

Continuação da prova

$$T(n) = T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + T(\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor) + n$$

INDUÇÃO
MATEMÁTICA

$$\stackrel{\text{hi}}{\leq} 20 \lceil \frac{n}{3} \rceil \lg \lceil \frac{n}{3} \rceil + 20 \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor \lg \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + n$$

$$\leq 20 \frac{n+2}{3} \lceil \lg \frac{n}{3} \rceil + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n$$

$$< 20 \frac{n+2}{3} (\lg \frac{n}{3} + 1) + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n$$

$$= 20 \frac{n+2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n$$

$$= 20 \frac{n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20 \frac{2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n$$

Continuação da continuação da prova

$$< 20n \lg \frac{2n}{3} + 14 \lg \frac{2n}{3} + n$$

$$= 20n \lg n + 20n \lg \frac{2}{3} + 14 \lg n + 14 \lg \frac{2}{3} + n$$

$$< 20n \lg n + 20n(-0.58) + 14 \lg n + 14(-0.58) + n$$

$$< 20n \lg n - 11n + 14 \lg n - 8 + n$$

$$= 20n \lg n - 10n + 14 \lg n - 8$$

$$< 20n \lg n - 10n + 7n - 8$$

$$< 20n \lg n$$

iiiiéééééssss!

De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

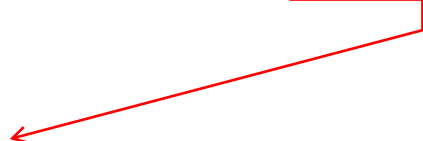
Exercício: Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/10 \rceil) + T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \dots$ e mostre que $T(n)$ é $O(n \lg n)$.

Mesmo assumindo que o PARTIÇÃO faz uma divisão ruim 1:9, ainda temos $O(n \lg n)$



De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

Exercício: Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/10 \rceil) + T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \dots$ e mostre que $T(n)$ é $O(n \lg n)$.

Note que, se o QUICKSORT fizer uma “boa” partição a cada, digamos, 5 níveis da recursão, o efeito geral é o mesmo, assintoticamente, que ter feito uma boa partição em todos os níveis.